

9. cvičení - řešení

Příklad 1

Obecný postup: K určení definitnosti kvadratické formy použijeme Větu 10.4. K tomu potřebujeme nejdříve matici A převést do diagonálního tvaru, což dle Věty 10.10 lze. Dle Věty 10.9 tak dostaneme diagonální matici, která má stejnou definitnost jako původní matice.

Příklad 1 (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \vec{x} = (1, 3)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: } \Pi'} \Pi^{-2} I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

V 10.4 $\implies$ ID.

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 - 7 \cdot 3 = 7 - 21 = -14$$

Příklad 1 (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \vec{x} = (1, 0, 1)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: } \Pi'} 2 \cdot \Pi \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ -2 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: } \Pi'} I + \Pi \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{\text{sym. ú.: } \Pi'} -10 \Pi + \Pi \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix}$$

V 10.4 $\implies$ ID.

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 5 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

Příklad 1 (e) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = (1, 0, -3, 4)^T$

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: III}' = \text{III}-2\text{IV}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \\
&\xrightarrow{\text{sym. ú.: IV}' = \text{IV}-\frac{2}{7}\text{I}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{12}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: IV}' = 7\text{IV}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 14 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 14 & -7 & 84 \end{pmatrix} \sim \\
&\xrightarrow{\text{sym. ú.: III}' = \text{III}+\frac{1}{3}\text{II}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 14 & -\frac{7}{3} & 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sym. ú.: IV}' = \text{IV}-\frac{14}{3}\text{II}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{56}{3} \end{pmatrix} \sim \\
&\xrightarrow{\text{sym. ú.: IV}' = \text{III}+\text{IV}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

V 10.4 $\implies$ PD.

Příklad 2 (a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla nalezneme pomocí Věty 10.12.

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(6 - \lambda) - 3 = 24 - 4\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 7)(\lambda - 3)$$

Vlastní čísla: 3, 7.

Jak zjistit vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu: Pro vlastní vektor x matice A příslušný číslu λ platí: $Ax = \lambda x$, tedy $Ax = \lambda Ix$, kde I je jednotková matice. Platí tedy, že

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Stačí proto zjistit, jak vypadá $\ker(A - \lambda I)$.

$$\lambda = 3 \implies \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, -1)\}$$

Tedy vlastnímu číslu 3 přísluší vlastní vektor $(1, -1)$.

$$\lambda = 7 \implies \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 3)\}$$

Tedy vlastnímu číslu 7 přísluší vlastní vektor $(1, 3)$.

Příklad 2 (e) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla nalezneme pomocí Věty 10.12.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 6 & -2-\lambda & -2 \\ 3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2-\lambda & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (3-\lambda)((2+\lambda)(1+\lambda)-2) - 6(1+\lambda-1) + 3(2-2-\lambda) = \\ &= (3-\lambda)(2+2\lambda+\lambda+\lambda^2-2) - 6\lambda - 3\lambda = \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda) - 9\lambda = 3\lambda^2+9\lambda-\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda = \\ &= -\lambda^3 \end{aligned}$$

Tedy vlastní číslo A je $\lambda = 0$ násobnosti 3.

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 0, 3), (0, 1, -1)\}$$

Tedy vlastnímu číslu 0 přísluší vlastní vektory $(1, 0, 3), (0, 1, -1)$.

Příklad použití Sylvestrova kritéria (může se hodit pro malé matice, pro velké už je dost nepraktické typicky):

- Vyšetřete definitnost matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

Zkusme nejdříve zjistit, zda je matice A PD či ND (pokud by tomu tak bylo, nemusíme počítat příliš mnoho determinantů, pokud by tomu tak nebylo, museli bychom tyto determinanty ověřovat i tak v rámci zjišťování, zda je A NSD či PSD). Podívejme se tedy na determinanty „začátků matice A “,

$$\text{tedy na } \det(-1), \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\det(-1) = -1 < 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-5) - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -1(35-4) - 2 \cdot (-14) = -31 + 28 < 0$$

Vidíme, že nám determinanty vyšly $< 0, > 0, < 0$, tedy je splněna ekvivalentní podmínka pro ND v Sylvestrově kritériu (pro liché k , což je rozměr „začátku matice A “, má vycházet záporný determinant, pro sudé kladný). Dostáváme tedy, že A je ND.

- Vyšetřete definitnost matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Opět začneme determinanty „začátků matice A “:

$$\det(5) = 5 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2 \cdot 2 = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5(1 - 1) - 1(2 - 1) = -1 < 0$$

Jelikož determinanty nejsou všechny kladné a ani nám nevychází záporný, kladný, záporný, ..., tak dle Sylvestrova kritéria matice A není ani PD, ani ND.

Zkusme ověřit NSD a PSD. Podívejme se tedy na výběry matice...

$$\circ k = 1 \implies i_1 = 1, 2, 3$$

výběry: $(a_{1,1}), (a_{2,2}), (a_{3,3})$. Determinanty:

$$\det(a_{1,1}) = \det(5) = 5 > 0$$

$$\det(a_{2,2}) = \det(1) = 1 > 0$$

$$\det(a_{3,3}) = \det(1) = 1 > 0$$

Číslo k je liché. Ze Sylvestrova kritéria nyní plyne, že A není NSD, neb by jinak zde vyšly determinanty ≤ 0 . Matice A je tedy buď PSD nebo ID. Podívejme se na výběry pro další k .

$$\circ k = 2 \implies \text{výběry } (i_1, i_2) \text{ jsou: } (1, 2), (1, 3), (2, 3)$$

$$(1, 2) \implies \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$(1, 3) \implies \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 > 0$$

$$(2, 3) \implies \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \geq 0$$

$$- k = 3 \implies \text{výběr: } (1, 2, 3)$$

$$\det A = -1 < 0$$

Vidíme, že zde nevychází ≥ 0 , tedy dle Sylvestrova kritéria A není PSD. Zbývá, že A je ID.